

„Baum“ und „Halbverband“

sind Begriffe der kombinatorischen Topologie. bzw. der mathematischen Theorie der Verbände. Es sind Namen abstrakter Strukturen. Die folgende graphische Darstellung und der erklärende Text sind dem zitierten Aufsatz von Christopher Alexander entnommen.* Weggelassen wurden in der zitierten Passage lediglich die Hinweise, die sich auf Beispiele aus dem Bereich der Stadtplanung beziehen.

„Um diese Struktur zu verstehen, wollen wir einen Augenblick lang abstrahieren, indem wir Zahlen als Symbole benutzen. . . Wir wollen eine einfache Struktur mit nur einem halben Dutzend Elementen betrachten. Wir bezeichnen diese Elemente mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 und können aus diesen 6 Elementen 56 verschiedene Untermengen bilden; darin sind nicht enthalten: die Menge selbst (1, 2, 3, 4, 5, 6), die leere Menge (-) und die einelementigen Mengen (1), (2), (3), (4), (5), (6).

Angenommen, wir wählen jetzt von diesen 56 Mengen bestimmte aus (und betrachten sie als gegebene Einheiten). Wir wollen beispielsweise folgende Teilmengen auswählen: (1,2,3), (3,4), (4,5), (2,3,4), (3, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6).

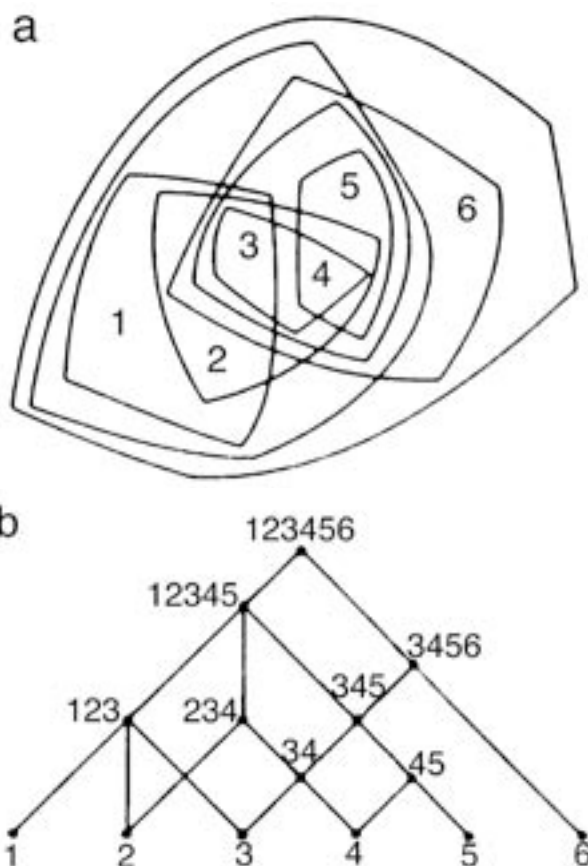
Welche möglichen Beziehungen gibt es zwischen diesen Mengen? Einige sind in größeren Mengen vollständig enthalten, wie (3, 4) in (3, 4, 5). Einige Mengen weisen Überschneidungen auf, wie (1, 2, 3) und (2, 3, 4). Einige Mengen sind nicht verknüpft, das heißt, sie enthalten keine gemeinsamen Elemente, wie (1, 2, 3) und (4, 5).

Wir können diese Beziehungen auf zweierlei Art und Weise dargestellt sehen. Im Diagramm a ist jede Menge, die als Einheit ausgewählt wurde, durch eine Linie abgegrenzt. Im Diagramm b sind die ausgewählten Mengen nach steigender Größe angeordnet, so daß immer, wenn eine Menge eine andere enthält - wie (3, 4, 5) (3, 4) enthält -, eine vertikale Verbindung von der einen zur anderen führt. Um der Klarheit und der visuellen Ökonomie willen ist es üblich, nur solche Mengen durch Linien zu verbinden, zwischen denen keine weiteren Mengen und Linien angeordnet sind. Die Verbindung von (3, 4, 5) und (3, 4, 5, 6) und die von (3, 4) und (3,4, 5) erübrigt daher eine Verbindung von (3, 4) und (3, 4, 5, 6).

Wie wir aus diesen beiden Darstellungen ersehen, stiftet die Wahl der Teilmengen allein diese als Gesamtheit mit einer übergeordneten Struktur aus. Dies ist die Struktur, mit der wir uns hier beschäftigen. Wenn die Struktur bestimmte Bedingungen erfüllt, wird sie Halbverband genannt, wenn sie andere, weiter einschränkende Bedingungen erfüllt, nennt man sie Baum.

Das Axiom des Halbverbandes lautet folgendermaßen: „Eine Ansammlung von Mengen bildet einen Halbverband, wenn und nur wenn zwei sich überschneidende Mengen zur Ansammlung gehören und dann auch die beiden gemeinsame Menge von Elementen zur Ansammlung gehört.“

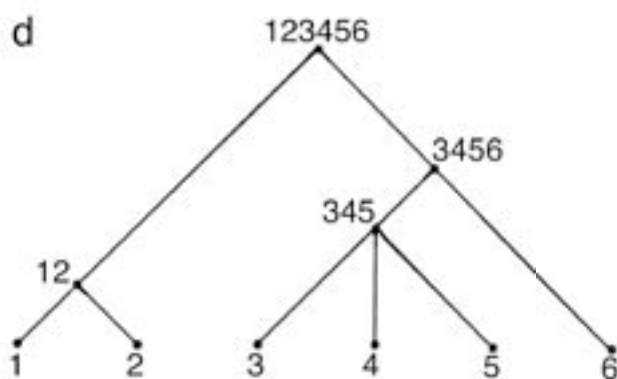
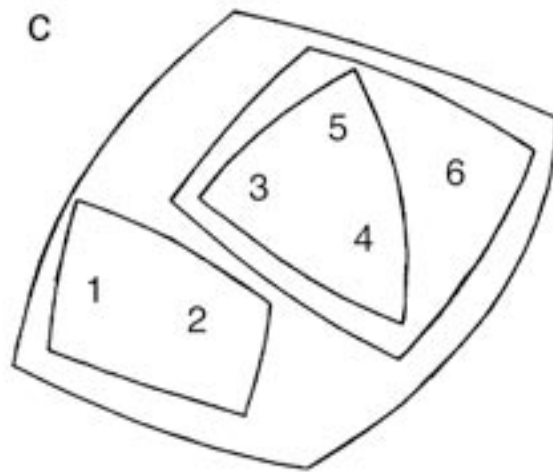
Die in Diagramm a und b dargestellte Struktur ist ein Halbverband. Das Axiom wird erfüllt, da zum Beispiel (2, 3, 4) und (3, 4, 5) und ebenso die beiden gemeinsame Menge von Elementen (3, 4) zur Ansammlung gehören.



Das Axiom des Baumes lautet: "Eine Ansammlung von Mengen bildet einen Baum, wenn und nur wenn von jeden beliebigen zwei Mengen der Ansammlung entweder die eine vollständig in der anderen enthalten ist, oder beide gänzlich getrennt sind.

Die in Diagramm c und d dargestellte Struktur ist ein Baum. Da dieses Axiom die Möglichkeit sich überschneidender Mengen ausschließt, gibt es keinen Weg, das Axiom des Halbverbandes zu verletzen, so daß, jeder Baum ein trivial vereinfachter Halbverband ist.

Jedoch beschäftigen wir uns in diesem Artikel weniger mit der Tatsache, daß ein Baum ein Halbverband sein könnte, als mit dem Unterschied zwischen Bäumen und jenen allgemeineren Halbverbänden, die keine Bäume sind, weil sie sich überschneidende Einheiten enthalten. Wir beschäftigen uns mit Strukturen, in denen keine Überschneidungen, und solchen, in denen Überschneidungen auftreten.



Nicht nur die Überschneidung ist für die Unterscheidung der beiden wichtig. Wichtiger noch ist die Tatsache, daß der Halbverband potentiell eine viel komplexere und feinere Struktur als der Baum ist. Wir können an folgender Tatsache genau feststellen, wieviel komplexer ein Halbverband sein kann als ein Baum: ein auf 20 Elementen aufgebauter Baum kann höchstens 19 weitere Teilmengen dieser 20 Elemente enthalten, während ein Halbverband auf der Basis dieser 20 Elemente mehr als eine Million verschiedener Teilmengen enthalten kann. Diese erheblich größere Vielfalt ist ein Kennzeichen für die große strukturelle Komplexität, die ein Halbverband im Vergleich zu der strukturellen Einfachheit eines Baumes haben kann. Das Fehlen von struktureller Komplexität dagegen ist charakteristisch für Bäume."

* Christopher Alexander, „A City is not a Tree“ in Design: a monthly journal for manufacturers and designers (London: Council of Industrial Design), Feb. 1966, Nr. 206, S. 46-55; zitiert nach: dt. Übersetzung in Bauen und Wohnen: Internationale Zeitschrift für die Gestaltung und Technik von Bau, Raum und Gerät (München: Vlg. Bauen + Wohnen), Juli 1967, S. 283-290.